WISKUNDE

MIX
Papier | Ondersteunt verantwoord bosbeheer
FSC® C083411

Uitgeverij Academia Press
Ampla House
Coupure Rechts 88
9000 Gent
België

www.academiapress.be

Uitgeverij Academia Press maakt deel uit van Lannoo Uitgeverij, de boeken- en multimediadivisie van Uitgeverij Lannoo nv.

ISBN 978 94 014 9118 1– D/2023/45/75 – NUR 740/918

David Eelbode
Wiskunde. Oneindig veelzijdig
Gent, Academia Press, 2023, 88 p.

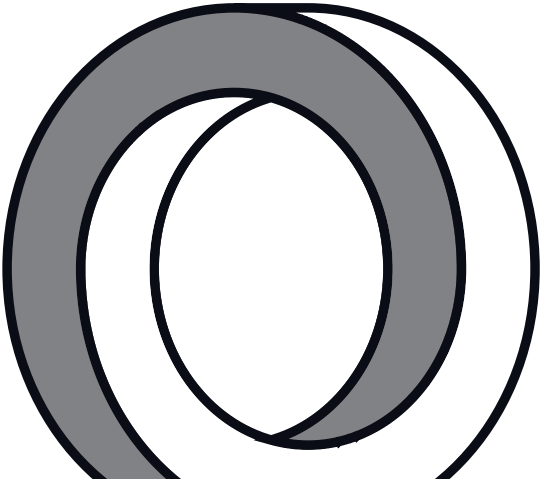
Eerste druk, 2023
Vormgeving cover: Studio Lannoo
Vormgeving binnenwerk: Studio Lannoo
Zetwerk binnenwerk: Shareya Verheijen, Studio Lannoo

VIZIER

David Eelbode

WISKUNDE

Oneindig veelzijdig



ACADEMIA
PRESS

INHOUD

INLEIDING

Ergens is het ironisch dat wiskunde – die dikke tak aan de boom der wetenschappen waarvan zowat elk blad is ontsproten aan een strak omlijnde definitie – zelf niet makkelijk in een allesomvattende definitie te gieten is. Vraag bijvoorbeeld aan tien willekeurige personen op straat ‘Wat is wiskunde?’, en je krijgt vermoedelijk evenveel verschillende antwoorden. Dat, en getuigenissen van mensen die nog steeds nachtmerries hebben over sinussen, cosinussen en andere foltertuigen uit hun middelbareschoolperiode.[1] Verrassend genoeg zal je ook van de wiskundigen zelf geen eenduidig antwoord krijgen op de vraag wat wiskunde is. Volgens Wikipedia, het kraantjeswater onder de bronnen der kennis, is het ‘een formele wetenschap die onder andere getallen, patronen en abstracte structuren bestudeert’. Persoonlijk vind ik dat een behoorlijk accurate omschrijving, maar ze is misschien niet zo makkelijk te begrijpen als je geen voeling hebt met wat ik gemakshalve dan maar even de gevorderde wiskunde zal noemen. In het boek *What is Mathematics* omschrijven de auteurs (Courant en Robbins) het dan weer als volgt: ‘wiskunde – als een uitdrukking van de menselijke geest – weerspiegelt de actieve wil, de contemplatieve rede en het verlangen naar esthetische perfectie’. Een omschrijving die me doet denken

1 Mijn excuses voor pagina 77 alvast.

aan het geschreeuw van mijn favoriete metalzanger: klinkt goed, maar niet per se verstaanbaar.

Dat wiskunde zo moeilijk te vatten is, komt voor de meeste lezers vermoedelijk niet echt als een verrassing. Maar het heeft dus blijkbaar niet alleen betrekking op de beruchte moeilijkheidsgraad; ook de discipline zelf laat zich niet makkelijk omschrijven. Zelfs in dit boek zal je geen sluitende definitie vinden voor ‘de wiskunde’; wie de laatste pagina bereikt, zal hopelijk echter een beter idee hebben van wat men in de wiskunde bestudeert (niet alleen de getallen, maar ook de fameuze patronen en structuren), hoe dat precies gebeurt, en op welke manier wiskunde daarmee past in het rijtje van de exacte wetenschappen, naast bijvoorbeeld biologie, fysica en chemie. Op die manier hoop ik een beetje licht te werpen op de onschuldige vraag ‘Wat is wiskunde?’

Uiteraard zijn er verschillende *soorten* wiskunde, maar die allemaal opsommen lijkt me niet echt het antwoord waar we naar op zoek zijn. Stel dat je van een bioloog een lijstje krijgt met daarop een hele resem dieren – van apen tot zwartharige vachtegels, over alles wat daar alfabetisch tussen zit – dan zal je dat vermoedelijk ook niet accepteren als antwoord op de vraag ‘Wat is een zoogdier?'. Dus verklaren wat wiskunde is door het verschil uit te leggen tussen pakweg representatietheorie voor simpele groepen en differentiaalmeetkunde heeft weinig zin. Toch is het zinvol om even stil te staan bij de twee grootste stromingen in de wiskunde: de fundamentele en de toegepaste wiskunde. Twee keer wiskunde, maar beide domeinen hebben een andere reputatie. Toegepaste wiskunde zit in de categorie waarin ook schoongemaakte schorseneren en ontpitte olijven zich bevinden: de meeste mensen doen het liever niet zelf, maar appreciëren wel de inspanningen van anderen en maken er daarna graag gebruik van. Zelfs jij, want ook je telefoon draait op formules en algoritmen die steunen op wiskundige theorieën. De fundamentele wiskunde daarentegen, die roept eerder tegenstrijdige associaties op bij het grote publiek. Sommige mensen slagen er nog in om die bizarre symbolen op stoffige krijtborden te zien als een uit de hand gelopen hobby van denkers met een bizar gevoel voor schoonheid – al waren het met bloed beschilderde doeken – maar anderen zien fundamentele wiskunde jammer genoeg als een nutteloze denkoefening die niets (meer) met de realiteit te maken heeft. En alsof dat nog niet genoeg is, moet men zich in de wiskunde ook houden aan allerlei regels en definities die elke vorm van creativiteit lijken te beknotten – iets waar echte kunstenaars geen last van lijken te hebben.

Vreemd genoeg is het net andersom: die regels en definities stellen de wiskundige net in staat om creatief uit de hoek te komen. Laten we het als volgt stellen: wie outside the box wil denken, moet weten wáár de doos precies eindigt, om dan buiten de grenzen van die doos op ontdekkingstocht te gaan. Zo werkt het ook in de wiskunde: hoe sneller je begrijpt wat de definitie precíés omlijnt, hoe sneller je buiten die lijntjes kan kleuren. Neem nu bijvoorbeeld de doos waarin wiskundigen kennis verzamelen over rechten, cirkels, hoeken en allerlei andere zaken die je in de les wiskunde op school zag passeren (laat me raden: een doos met een paar stevige lagen plakband eromheen, ergens ver weg op zolder). Zolang je binnen die doos zit, doe je dan ‘euclidische meetkunde’, en moet je je inderdaad aan een aantal regels houden. Regels die wiskundigen axioma’s noemen, in dit geval dus de axioma’s van Euclides. In die doos zal je bijvoorbeeld geen enkele driehoek vinden waarvan de som van de hoeken níét exact gelijk is aan 180 graden, omdat er een stelling in de euclidische doos zit die net bewijst dat de som van de hoeken van een 'gewone' driehoek gelijk is aan 180 graden. Maar dat wil daarom nog niet zeggen dat er geen driehoeken zijn waarvan de som van de hoeken níét gelijk is aan 180 graden, je zal ze alleen in een ándere doos moeten gaan zoeken. Als die doos al bestaat, want ook dat ligt niet voor de hand.

Sinds de negentiende eeuw weten we niet alleen dat er werkelijk een doos bestaat met driehoeken die zich niet aan de klassieke regels houden, maar ook dat het er zelfs meerdere zijn. Voor wie dat vreemd vindt: je kan opmerken dat 'niet gelijk aan 180 graden' kan betekenen dat het méér is, of net minder. Dat zijn dus al twee verschillende afwijkende scenario's. Maar dat betekent ook dat er meerdere soorten meetkunde bestaan: de euclidische versie, die het dichtst aanleunt bij onze menselijke intuïtie, en een heleboel niet-euclidische versies waar driehoeken en rechte lijnen zich anders gedragen dan je zou denken. Het verhaal achter die ontdekkingen is niet uniek in de geschiedenis van de wiskunde: baanbrekende theorieën zijn vaak uitgebreide antwoorden op het type onschuldige vragen dat kinderen graag stellen, zoals 'Wat is een kleur?' of 'Waarom zijn stenen hard?' Vragen die je nog het best kan vergelijken met loszittende draadjes aan een wollen trui; je kan daar niet zomaar even aan trekken, want voor je het weet ben je dat zelfgebreide kerstcadeau van je oma helemaal aan het ontrafelen.

Ook andere wetenschappers stellen zich dat soort vragen: denk bijvoorbeeld aan een fysicus die zich afvraagt wat 'materie' eigenlijk is. Die zal zijn zoektocht misschien nog beginnen bij moleculen en atomen, maar voor die het weet, daalt hij steeds dieper af in de hiërarchie van de bouwstenen van ons universum, en probeert hij de geheimen van de zogenaamde quarks bloot te leggen. Evengoed kan de wiskundige zich afvragen wat ‘een getal’ precies is, en voor ze het weet daalt ook zij steeds dieper af in een gestructureerde hiërarchie – al is het nét iets moeilijker om te verklaren over welke bouwstenen het dan gaat. Ook dat hoop ik een beetje te verklaren met dit boekje: zo zullen we enkele ‘structuren’ ontmoeten waarmee het weefsel van de wiskundige ‘realiteit’ wordt gevlochten. Zeg maar de bouwstenen van onze – voor velen toch eerder gortdroge – materie.

Merk op dat dit boek geen handboek wiskunde is. Je zal aan het einde van dit avontuur geen zwarte gordel behalen in de discipline integralen berekenen, noch een medaille omdat je de duizendste macht van een (42×42)-matrix kan bepalen. Maar je zal hopelijk wel begrijpen waarom wiskunde een creatieve wetenschap is, en hoe definities dat in de hand werken. Hopelijk zal je ook snappen op welke manier wiskundigen de objecten die ze bestuderen in een classificatie proberen te gieten, zoals biologen die levende wezens in stammen, families en soorten onderverdelen. Misschien zal je aan het eind zelfs een idee hebben van de manier waarop wiskundigen de taal uitvinden waarmee hun collega’s proberen om de natuur in al haar facetten te beschrijven. Een krachtige taal, omdat ze ons in staat stelt ingewikkelde concepten en ideeën op een compacte en universele manier in symbolen uit te drukken – zo hoef je bijvoorbeeld geen Japans te kennen om wiskundige formules in een Japans handboek te kunnen lezen. Daarom zal ik ook in dit boek nu en dan formules en wiskundige symbolen gebruiken – al heb ik mijn best gedaan om dat tot een absoluut minimum te beperken.

1 WISKUNDE ALS CREATIEVE WETENSCHAP

Om te begrijpen op welke manier wiskundigen creatief kunnen zijn, zal ik teruggrijpen naar een klassiek probleem – het bepalen van de oplossingen voor een vergelijking – want wie het spreekwoordelijke *rabbit hole* van de wiskunde wil induiken, kan maar beter beginnen met het zoeken naar (vierkants)wortels. Niet alleen kan iedereen zich daar nog iets bij voorstellen, zo kan ik ook illustreren hoe toegepaste en fundamentele wiskundigen op een andere manier naar eenzelfde probleem kunnen kijken.

Met de 'i' van empathie

Wetenschap zit vol vergelijkingen die (nog) moeten worden opgelost, maar de meeste van die exemplaren zijn een stuk moeilijker dan de vergelijkingen die we op school hebben leren oplossen. Die laatste waren problemen waarvoor het antwoord op de vraag gewoon een getal was – de wortels waarvan sprake in de voorgaande alinea. Een getal dat zich verstopte achter zijn anonieme status, want om een of andere reden was het telkens de letter x die gezocht werd. De meeste vergelijkingen die wetenschappers willen oplossen, zijn zogenaamde differentiaalvergelijkingen, en die zijn heel wat ingewikkelder. We komen daar later op terug, zodra we leren wat limieten zijn – in de hoop dat je die van jou tegen dan nog niet bereikt hebt. Maar we kunnen al ver raken met de exemplaren die we op school leerden oplossen.

De Amerikaanse komiek Stephen Colbert, die je kan kennen van *The Daily Show*, omschreef vergelijkingen ooit als 'sentences of the devil' – iedereen die zijn leraar wiskunde ooit de hel toewenste, zal het daar misschien mee eens zijn – maar hij vond kwadratische vergelijkingen alvast de ergste. Hij noemde ze zelfs een 'an infernal salad of letters, numbers and symbols'. Zonder het jaarlijkse geworstel van scholieren hier te willen minimaliseren, die kwadratische vergelijkingen zijn makkelijk op te lossen: neem een blaadje papier, bereken de discriminant, en daarmee bepaal je vrij snel de juiste oplossingen. Voor wie vergeten is wat discriminanten zijn, en hoe dat dan precies werkt: geen paniek, dat komt zo meteen terug.

Dat betekent echter niet dat Stephens grootste nachtmerrie, de kwadratische vergelijking, compleet verwaarloosbaar is in ons avontuur. Integendeel, ze kan gebruikt worden om een voorbeeld te geven van de ongebreidelde creativiteit waarmee wiskundigen doorbraken forceren, met verregaande gevolgen. De meeste lezers zullen zich nog wel herinneren dat het kwadraat van een getal altijd positief is.[2] Neem je lievelingsgetal, en vermenigvuldig het met zichzelf: wat je nu verkregen hebt, is positief, niet? We kunnen het ook anders uitdrukken: van een negatief getal kan je geen vierkantswortel nemen. Nog anders gezegd – want om Stephen een plezier te doen, moeten we dat eerst nog omzetten in een kwadratische vergelijking: je kan bijvoorbeeld geen (reëel) getal x vinden dat zal voldoen

2 Wie het niet eens is met die bewering, weet vermoedelijk al wat complexe getallen zijn – een van de eindbestemmingen van dit hoofdstukje.

aan de vergelijking $x^2 = -1$, wat we kunnen herschrijven als $x^2 + 1 = 0$.

En daar komt de creatieve kant van de wiskundige naar boven, want voor haar is dat schijnbaar wiskundige verbod geen eindpunt, maar het begin van een zoektocht. Want in de wereld van de wiskunde zijn er nu twee opties: ofwel moet er iets nieuws bedacht worden, zodat het vinden van een oplossing x voor de vergelijking hiervoor dan plots wel kan (en dat 'nieuwe' kan dan uiteraard geen reëel getal zijn, want daarvan weten we dat het kwadraat positief is). Ofwel moet de wiskundige met een sluitend bewijs verklaren waarom er nooit ofte nimmer zo een x gevonden kan worden, en zo het verbod verankeren als een eeuwige waarheid die we dan een stelling noemen (eerder een teleurstelling dan).

In het geval van de vergelijking $x^2 = -1$ van hiervoor werd het de eerste piste: wiskundigen hebben een getal ingevoerd dat wél als eigenschap heeft dat het kwadraat ervan gelijk is aan het negatieve getal -1. Ze gaven dat getal niet alleen een naam, de zogenaamde 'complexe eenheid', maar ook een eigen iconisch symbool – in dit geval de letter i. Op die manier past de complexe eenheid in het rijtje bevoorrechte getallen waarvoor een letter werd ingevoerd, net zoals de beruchte π – zeg maar het selecte gezelschap van de getallen die rondrijden met een gepersonaliseerde nummerplaat. Die nieuwe letter geeft ons alvast één oplossing voor de vergelijking $x^2 + 1 = 0$, omdat per definitie geldt dat $i^2 + 1 = 0$. Anders gezegd, het kwadraat van i is gelijk aan -1, *omdat we het zo definiëren*.

Mijn bescheiden ervaring in het onderwijs heeft me geleerd dat wat ik hiervoor beschreef voor sommige studenten het exácte punt is waarop hun al mank lopende relatie met wiskunde helemaal op de klippen liep. En de boosdoener is de allerlaatste zin van de voorgaande alinea: niet alleen kwadrateert *i* tot een negatief getal – wat op zijn minst gezegd vloekt met onze intuïtie – het wordt dan ook nog eens zo *gedefinieerd*. Een beetje als 'Daarom!' antwoorden wanneer iemand 'Waarom?' vraagt. Maar het is helemaal niet vreemd dat dit getal werd ingevoerd als je even stilstaat bij het feit dat een kwadratische vergelijking zoals $x^2 = 4$ twee oplossingen krijgt toebedeeld (2 en -2), terwijl de vergelijking $x^2 = -1$ met lege handen achterblijft. Je zou bijna kunnen stellen dat wiskundigen het getal *i* hebben ingevoerd vanuit een zekere vorm van empathie, omdat ze medelijden hadden met al die vergelijkingen die eenzaam zaten te wachten op hun oplossingen. Iedereen gelijk voor de wet dus, en die wet zegt dan dat *alle* kwadratische vergelijkingen twee wortels hebben (voor de vergelijking $x^2 = -1$ zijn dat $+i$ en $-i$).

Het mag dan wel een eenvoudig voorbeeld zijn, die vorm van democratisch denken typeert een wiskundige, en kan gezien worden als een drang om het patroon niet te doorbreken: als bepaalde kwadratische vergelijkingen twee oplossingen hebben, waarom dan niet allemaal? Dat zou het geobserveerde patroon namelijk bevestigen, ook al moet daarvoor een ingreep gebeuren (de 'uitvinding' van de complexe eenheid) die het rechtvaardigt. Verder in dit boek zullen we niet alleen nóg voorbeelden zien van die gezonde verslaving om patronen niet te doorbreken, we zullen ook leren dat patronen die dan toch gebroken worden, de start kunnen zijn van een spectaculaire revolutie.